

TEORIA MĂSURII

Există mai mulți atomi decât stele?

HUGO ARIEL NAVARRETE HURTADO

Traducere de Ionela Polixenia Matei

LITERA

București

CUPRINS

Capitolul 0. Lebesgue: cum se construiește o clădire, pornind de la fundație	7
<i>Nicolas Bourbaki, matematicianul prolific care nu a existat vreodată</i>	10
Scurt istoric al măsurii	13
<i>Un paradox și două funcții paradoxale</i>	20
În măsura posibilului	22
Capitolul 1. Aplicați și/sau formalizați: o criză de cuplu profitabilă	23
<i>Matematica babiloniană</i>	24
Primele civilizații	24
Grecia antică	26
<i>Pitagoreicii</i>	28
Calculul infinitezimal	33
<i>Problema 1</i>	39
Abstractizare, aplicare, formalizare	40
<i>Numere hiperreale $^*\mathbb{R}$</i>	42
Giuseppe Peano și axiomatizarea numerelor naturale	47
<i>Problema 2</i>	51
Capitolul 2. Integrala și măsura. Lebesgue îi explică lui Lebesgue	53
Moștenirea Antichității: papirusul Rhind (cca 2000 î.Hr.)	54
Arhimede din Siracusa (cca 287-212 î.Hr.)	55
<i>Problema 3</i>	56
Bonaventura Cavalieri	57
Pierre de Fermat	59
<i>Problema 4</i>	61
Newton și Leibniz: calculul infinitezimal	61
Augustin-Louis Cauchy	63
<i>Ecuația undelor</i>	64
Bernhard Riemann	67
<i>Funcția lui Thomae</i>	70
Giuseppe Peano, Camille Jordan și Emile Borel. Nașterea noțiunii de măsură abstractă	72
Henri Léon Lebesgue	76

Capitolul 3. Mulțimi, funcții, numere și continuitate. Regulile jocului pentru a număra punctele într-un mod abstract

	83
<i>Logicismul și criza fundamentelor matematicii</i>	84
<i>Problema 5</i>	87
Mulțimi	87
<i>Diagramele lui Venn</i>	90
Funcții	93
Infinite și infinite numărabile	95
<i>Exemplul 1</i>	95
<i>Exemplul 2</i>	96
<i>Exemplul 3</i>	97
Numerele reale	97
<i>Problema 6</i>	100
Funcții continue	100

Capitolul 4. Măsura și integrala lui Lebesgue în acțiune. La ce ne folosesc toate acestea?

	103
<i>Elementele de Geometrie ale lui Euclid</i>	104
Măsura externă a lui Lebesgue	107
Mulțimi măsurabile	108
<i>Liber algebrae et almucabala</i> (Compendiu despre calcul pentru completare și echilibrare) de Al-Khwarizmi	110
Măsura și σ -algebra	112
Integrala Lebesgue	113
<i>Introductio in analysin infinitorum</i> (Introducere în analiza infinitelor) de Leonhard Euler	114
<i>Exemplul 1</i>	118
<i>Exemplul 2</i>	119
<i>Exemplul 3</i>	120
<i>Problema 7</i>	121
<i>Problema 8</i>	121
Aplicarea teoriei măsurii	121
Epilog	124

Anexă

Lecturi recomandate

143

Capitolul 0

Lebesgue: cum se construiește o clădire, pornind de la fundație

A existat un arhitect foarte ingenios care a născocit o nouă metodă pentru a construi case, începând cu acoperișul și lucrând până la fundație, bazându-se pe practica acelor insecte viclene care sunt păianjenii și albinele.
(Jonathan Swift, 1667–1745, *Călătoriile lui Gulliver*, 1726)

Opera principală a scriitorului irlandez Jonathan Swift, *Călătoriile lui Gulliver*, reprezintă una dintre cele mai dure și, în același timp, satirice critici care au fost scrise împotriva societății și a condiției umane. Stilul său de a scrie, sec, esențial și cu ironie mușcătoare, i-a câștigat recunoașterea universală, care se reflectă în acceptarea actuală a așa-numitei „satire swiftiane”, cu o referire explicită la tipul particular de satiră al căreia el a fost pionier. Deși a fost contemporan cu **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646–1716) și **Sir Isaac Newton** (1642–1726), ambii recunoscuți astăzi ca inventatori independenți ai calculului infinitezimal și protagoniști ai uneia dintre cele mai infame dispute din istoria științei, este puțin probabil să fi fost inspirat de aceștia pentru una dintre criticile sale feroce, considerate materialul abundent de inspirație aparținând oricărei societăți și oricărei epoci, pe care l-ar fi putut avea la dispoziție. Cu toate acestea, presentimentul corect pe care, din perspectiva noastră actuală, îl putem ghici din citatul de mai sus este cel puțin curios.

Dacă analizăm tabelul 1 de la pagina următoare, în care ramurile matematicii sunt comparate în ordinea în care sunt studiate în prezent, cu aspectul istoric al conceptelor implicate în fiecare ramură și



Figura 1. Ilustrație a caricaturistului francez J.J. Grandville (1803–1847) pentru *Călătoriile lui Gulliver*. Numele său adevărat era Jean Ignace Isidore Gérard și, după instituirea cenzurii pentru caricaturi în 1835, a ilustrat cu măiestrie romane precum *Robinson Crusoe*, *Don Quijote*, *Călătoriile lui Gulliver* sau fabulele lui La Fontaine. Astăzi aceste desene sunt deosebit de cunoscute, având în vedere că pentru câteva generații de cititori ele constituie o amintire evocatoare a operelor cărora le aparțin.

a protagoniștilor iluștri, putem vizualiza premoniția secretă a citatului de deschidere a capitolului.

Formarea matematicii actuale	Dezvoltare istorică și protagoniști
Teoria mulțimilor și a numerelor reale	Cantor (1875), Dedekind (1872)
Funcții, limite și continuitate	Cauchy (1821), Weierstrass (1861)
Derivate și integrale	Newton (1665), Leibniz (1675)
Măsura, algebra indivizibilă și partiții	Arhimede (200 î.Hr.), Al-Khwarizmi (cca. 830) Cavalieri (1635), Fermat (1636)
Teoria măsurii și algebra abstractă	Jordan (1892), Borel (1898) Lebesgue (1902), Emmy Noether (1920)

Tabelul 1.

Se poate observa că, de regulă, o pregătire riguroasă în matematică progresează (mai mult sau mai puțin) în ordinea inversă a evoluției istorice a teoriilor implicate. În plus, ultimul element din tabel evidențiază un fapt cunoscut mai multor istorici și, mai ales, unui matematician

prolific și fictiv (vezi „Nicolas Bourbaki, matematicianul prolific care nu a existat vreodată”, pag. 10), Nicolas Bourbaki: „Henri Léon Lebesgue poate fi considerat Arhimede al teoriei moderne a măsurii”.

Există, de asemenea, un consens general în a afirma că teza de doctorat a lui **Henri Léon Lebesgue** (1875–1941), intitulată *Intégrale, longueur, aire* (Integrale, lungime, suprafață) și discutată la data de 10 februarie 1902 la Facultatea de Științe a Universității din Nancy (aprobată de decanul Gastón Darboux și publicată în același an în *Analele de Matematică Pură și Aplicată din Milano*), este una dintre cele mai bune teze de doctorat pe care le-a scris vreodată un matematician. De fapt, teoria măsurii contemporane urmează notițele lui Lebesgue. Am putea spune că, înainte de 1902, matematicienii nu elaboraseră o teorie riguroasă a integrării și, tocmai din acest motiv, teza de doctorat deosebit de meritorie a lui Lebesgue a schimbat situația în mod irevocabil. În această contribuție au fost depășite dificultățile care începuseră să afecteze integrala lui Bernhard Riemann, extinzând cu îndrăzneală conceptul de integrală, pentru care a fost considerat ulterior un proces de completare extrem de profund, precum cel care a dus de la numerele raționale la numerele reale. Lebesgue nu a fondat nicio școală, dar influența sa în matematica secolului al XX-lea este eternă.

Henri Léon Lebesgue s-a născut la Beauvais, la aproximativ optzeci de kilometri de Paris, la data de 28 iunie 1875. Interesele intelectuale ale părinților săi, un tipograf și o învățătoare de școală primară, s-au reflectat semnificativ în biblioteca familiei, dat fiind că tânărul Lebesgue a găsit acolo lecturile care l-au inspirat și influențat



Figura 2. Henri Léon Lebesgue, inventator al teoriei moderne a integralei și a măsurii.

Continuă la pag. 12

NICOLAS BOURBAKI, MATEMATICIANUL PROLIFIC CARE NU A EXISTAT VREODATĂ

În secolul al XIX-lea, Academia de Științe din Paris nu mai era puterea matematică ce fusese cândva, umbrită de legendara Universitate din Göttingen și de giganții matematicii germane: **Carl Friedrich Gauss** (1777–1855) și **Bernhard Riemann** (1826–1866). Pentru a înrăutăți lucrurile, în timpul Primului Război Mondial, o mare parte dintre cei cu talent matematic fusese sacrificată, astfel încât generația de matematicieni francezi din a doua decadă a secolului al XX-lea s-a trezit fără o figură inspiratoare, până când **André Weil** (1906–1998) nu i-a scris unui membru al Academiei de Științe pentru a prezenta un nou coleg:

Cu siguranță nu știți că domnul Bourbaki este vechiul profesor de la Universitatea Regală din Besse-in-Poldavia (o națiune fictivă fără Stat, numită Poldavia) pe care l-am întâlnit cu ceva timp în urmă într-o cafenea din Clichy unde petrece cea mai mare parte din zi și din noapte; pierzându-și nu doar poziția, ci aproape toată averea în evenimentele care au făcut să dispară de pe harta Europei nefericitul neam poldav, își câștigă în prezent existența dând lecții de „belote”, un joc de cărți la care este un adevărat maestru.

Cu câțiva ani mai devreme, în 1923, **Raoul Husson** (1901–1967), elev al École Normale Supérieure, când era în anul trei de studii, s-a deghizat pentru a ține o conferință științifică falsă, intenționat de neînțeles și plină de raționamente false, al cărei obiectiv a fost demonstrarea presupusei teoreme a lui Bourbaki. Pentru farsa sa genială, s-a inspirat de la generalul Charles Denis Bourbaki (1816–1897) – care, în timpul războiului franco-prusac, a avut mai mulți elevi sub comanda sa – cu intenția de a-l aminti.

Se pare că un grup de matematicieni a fost atât de amuzat de această poveste încât au decis să adopte numele de Nicolas Bourbaki pentru a-și numi grupul. O cercetare punctuală ar dezvălui că într-o zi din decembrie 1934, la prânz, în cafeneaua acum dispărută À Capoulade (la numărul 63, Boulevard Saint-Germain din Paris), André Weil (unul dintre cei mai talentați

matematicieni ai timpului său) a menționat cinci colegi contemporani la fel de pasionați: **Henri Cartan** (1904–2008), **Claude Chevalley** (1909–1984), **Jean Delsarte** (1903–1968), **Jean Dieudonné** (1906–1992) și **René de Possel** (1905–1974), cu pretenția de a reordona matematica. Fără îndoială, au reușit să o modernizeze și să promoveze școala franceză. Celor șase pe care tocmai i-am prezentat li s-au alăturat **Jean Coulomb** (1904–1999), **Charles Ehresmann** (1905–1979) și **Szolem Mandelbrojt** (1899–1983), formând grupul de nouă membri fondatori.

Weil și contemporanii săi se întâlneau de trei ori pe an, pe parcursul unei săptămâni sau două, pentru a face schimb de idei despre matematică, cu intenția de a reexamina fundamentele matematice, pe baza unei nevoi mult mai mari de rigoare decât cea care era pe ordinea de zi la acea vreme. În mod normal, se adunau într-o cafenea de pe malul stâng al Senei, deși uneori mergeau la țară pentru a nu fi distrași de la obiectivul lor: să rescrie matematica de sus în jos și să ofere întregii discipline o bază solidă. Bourbaki era strict, dar în același timp anarhic, așa că singurul lucru care nu era permis în ședințe era să se tacă. Grupul a căutat să creeze noi matematici și se aștepta ca toată lumea să participe la o astfel de modelare. Mulți dintre cei invitați ca spectatori la întâlnirile lui Bourbaki au plecat cu impresia că este o adunătură de nebuni. Nu-și puteau imagina cum acei oameni, care țipau uneori câte trei sau patru în același timp, puteau ajunge la o concluzie inteligentă.

Deși în matematică, la fel ca în orice altă activitate științifică, contribuția fiecărei generații se bazează pe munca predecesorilor săi, Bourbaki și-a dat seama că acest „corpus” matematic devenise incoerent și avea prea multe elemente care erau deconectate unele de altele. El a crezut în unitatea intrinsecă a matematicii și s-a angajat să prezinte ansamblul tuturor elementelor în cea mai simplă și pură formă, pentru a reclasifica și reforma (sau restabili) în întregime disciplina, dezvăluind-o până ce ajungea la fundamentele sale cele mai profunde și această intenție se reflectă în abstracția și ambițiile înalte ale contribuțiilor sale.

Au început publicarea monumentalei lor enciclopedii *Éléments de mathématique*, cu referire la *Elementele* lui Euclid, prezentând cunoștințele

matematice într-un mod sistematic, conform noului canon de rigoare și a metodei axiomatice, cu care acești matematicieni au vrut să acopere orice probabilitate. În ciuda faptului că editarea enciclopediei pare să fi încetat, această lucrare a avut o influență semnificativă asupra matematicii secolului al XX-lea, insistând cu ardoare asupra conceptului de structură.

Membrii actuali rămân anonimi, dar impactul lor în matematica contemporană a fost, fără îndoială, enorm, deoarece se poate spune că cererea lor de rigoare a fost acceptată în mod universal încă din anii 1950, împreună cu stilul particular în care o exprimă. De altfel, încă din anii '60, toate textele matematice au fost întocmite după indicațiile lor. În fiecare an, Seminarul Bourbaki continuă să aibă loc la Paris, unde sunt expuse principalele progrese ale acestei științe.

Lucrarea lor prolifică din colecția *Éléments de mathématique*, până în 2016, este compusă din volumele „Teoria mulțimilor”, „Algebra”, „Topologie generală”, „Funcții ale unei variabile reale”, „Spații vectoriale topologice”, „Integrare”, „Algebră comutativă”, „Grupuri diferențiale și analitice”, „Grupuri și algebre Lie”, „Teorii spectrale” și „Topologie algebrică”. În plus, conține note istorice care au fost publicate separat, dând viață unor volume apreciate, chiar dacă încă incomplete, aparținând unui corpus care la denumirea de *Elemente de istorie a matematicii*. Pe lângă colecția *Éléments de mathématique*, din 1948 au fost publicate periodic, sub formă de monografii, prelegerile Seminarului Bourbaki.

În toată cariera sa academică. Din 1894 până în 1897 a urmat École Normale Supérieure din Paris, unde a absolvit cu note modeste, mai mici decât ale matematicienilor mai puțin capabili, pentru că a arătat întotdeauna o mentalitate independentă și a pus continuu la îndoială observațiile profesorilor, neglijând studiul temelor pe care

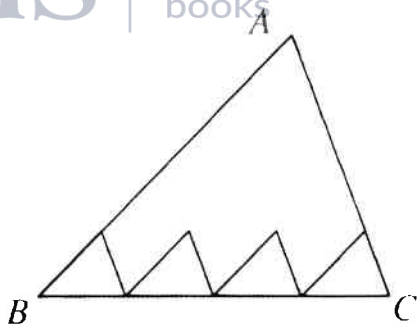


Figura 3. Paradoxul triunghiului care l-a fascinat pe Lebesgue în timpul adolescenței. Traectoria în zigzag de la B la C, de-a lungul triunghiurilor mici asemănătoare triunghiului BAC , are lungimea dată de suma segmentelor $AB + AC$. Pe măsură ce (observați ambivalența acestui termen) crește numărul de triunghiuri, parcursul limită se apropie de traectoria directă BC .

nu le considera interesante. Tocmai într-una dintre cele mai recente lucrări, Lebesgue amintește de un episod al adolescenței, petrecut la școala din Beauvais, care l-a supărat și pe care a încercat să-l infirme din toate puterile: paradoxul care vrea să demonstreze că suma lungimilor a două laturi ale unui triunghi este egală cu lungimea celei de-a treia laturi, după o „îngrozitoare” trecere la limită.

Pentru a aprecia profunzimea disputei cuprinse în acest paradox, să reluăm rapid evoluția conceptului de măsură.

Scurt istoric al măsurii

*În măsura în care legile matematicii privesc realitatea, ele nu sunt sigure;
și în măsura în care sunt sigure, nu reflectă realitatea.*

(Albert Einstein, 1879–1955)

În zorii civilizației, matematica se putea diferenția de știință și tehnologie, deoarece era posibil să fie considerată ca „arta rațională de a rezolva probleme abstracte cu numere și geometrie”. Să evidențiem în această definiție expresiile „rațional”, „abstract” și „rezolvarea

problemelor". În esență, ele sugerează că soluția unei probleme, de obicei de natură practică, trebuia obținută pe baza unor date inițiale, folosind un fel de proces mental, rațional și logic.

Calcularea dimensiunii unei figuri geometrice a fost întotdeauna considerată unul dintre cele mai elementare obiective ale matematicii. Calcularea dimensiunii unui obiect a devenit soluția pentru una dintre cele trei probleme considerate diferite: găsirea lungimii liniilor (pentru greci, rectificarea liniilor curbe), calcularea ariei suprafețelor (suprafețele pătrate) sau determinarea volumul corpurilor (cubarea solidelor). S-a presupus, în mod tacit, că dimensiunea unui obiect pe care o vom numi „măsură” are următoarele proprietăți:

1. Două obiecte identice au aceeași dimensiune.
2. Părțile unui obiect au o dimensiune mai mică decât obiectul complet.
3. Dacă un obiect este împărțit în părți care nu se suprapun, măsura întregului obiect este egală cu suma măsurilor părților sale.
4. Punctele, liniile și suprafețele au măsura 0, respectiv în măsurarea lungimilor, ariilor și volumelor.

Începuturile

Primele civilizații au apărut în văile fertile din China, India, Mesopotamia și Egipt, în jurul mileniului III î.Hr. Din păcate, materialele care au fost folosite pentru a scrie în China și India erau perisabile, așa că se știe foarte puține despre cunoștințele matematice ale acestor popoare. Cu toate acestea, datorită climatului arid, în Egipt a fost posibil să se păstreze un număr bun de documente și, prin urmare, două papirusuri, dedicate în întregime acestei științe, au ajuns până la noi: papirusul Rhind și papirusul Moscova. S-au păstrat și mai multe documente în Mesopotamia, unde se obișnuia să se scrie pe tăblițe de lut, practic indestructibile și, mai ales, rezistente la foc. Multe reguli empirice au fost descoperite în Egipt și Mesopotamia pentru rezolvarea diferitelor probleme matematice care, în parte,

s-au dovedit a fi incorecte din punct de vedere matematic sau doar aproximative.

Papirusul Rhind, de exemplu, conține 84 de probleme matematice, dintre care aproximativ 20 sunt dedicate calculului ariilor și volumelor. Aria unui paralelogram (produsul bazei cu înălțimea), a unui triunghi (jumătate din produsul bazei cu înălțimea) și a unui trapez (jumătate din produsul dintre suma bazelor și înălțime) a fost calculat corect. Pentru patrulatere, produsul dintre jumătate din suma unei perechi de laturi opuse și jumătate din suma celeilalte perechi de laturi a fost folosit în mod eronat. În special, este interesantă problema numărul 50 a papirusului Rhind, în care se argumentează că aria unui câmp circular cu o rază de 9 este egală cu aria pătratului cu latura egală cu 16. Acest lucru este echivalent cu afirmația că:

$$\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3,16...$$

În Mesopotamia, au coexistat multe grupuri socioculturale diferite, dar toate au folosit scrierea cuneiformă pe tăblițe de lut și, tocmai din acest motiv, toate sunt considerate în prezent adevărate civilizații. Majoritatea tăblițelor matematice provin din două biblioteci, cea a lui Tiglatpilèser I din Assur și cea a lui Assurbainipal din Ninevah, în care, pentru a scrie numerele, se folosea sistemul sexagesimal (fără zero), conform căreia era relativ simplu să se efectueze calcule. Mesopotamienii puteau rezolva probleme mult mai dificile decât egiptenii și erau mult mai interesați de problemele algebrice decât de cele geometrice, după cum se poate deduce, având în vedere că primele soluții ale ecuațiilor pătratice și, de asemenea, o versiune rudimentară a celebrei și universale teoreme ale lui Pitagora, a apărut tocmai în Mesopotamia. Aria poligoanelor regulate și a cercului a fost calculată prin înmulțirea lungimii perimetrului cu constanta corespunzătoare asociată cu înălțimea triunghiurilor isoscele în care figura

a fost împărțită. În cazul cercului, constanta utilizată corespunde unei aproximări a numărului 3 pentru valoarea lui π .

Grecia antică

Filosofii și matematicienii greci au făcut marea descoperire că regulile matematice puteau fi dovedite pe baza unor principii elementare numite „postulate” și a fost posibilă organizarea tuturor cunoștințelor matematice într-o teorie axiomatică. Geometria greacă, care a început cu **Thales din Milet** (624–546 î.Hr.) a fost precedată de pitagoreici, care au dezvoltat-o inițial, în secolele al VI-lea și al V-lea î.Hr. Aceștia din urmă au analizat proprietățile numerelor și ale figurilor geometrice (în special ale poligoanelor regulate, ale solidelor regulate și ale cercurilor) și au formulat teoria proporțiilor raționale exprimată în legendara maximă „totul este număr”, cu referire la faptul că totul putea fi măsurat în termeni de cantități „comensurabile”.

În Grecia antică s-a căutat o rezolvare a problemei măsurării mărimilor geometrice, prin intermediul unei măsurii relative. Euclid (cca 325–265 î.Hr.), cel mai influent reprezentant al său până în prezent, stabilește ceea ce am numit „măsură relativă”, adică modul în care o mărime necunoscută se măsoară prin echivalență cu o cifră de referință în cazul segmentelor, suprafețelor plane și solidelor. Arhimede, unul dintre cei mai importanți matematicieni ai Antichității și, în general, ai întregii istorii, a folosit metoda exhaustivă pentru a calcula aria de sub arcul unei parabole, ca sumă a unei serii infinite, oferind o aproximare extrem de precisă a numărului π . Metoda exhaustivă și cea mecanică sunt două stiluri opuse metodologic pentru a obține pătrate de figuri curbilinii, dar ambele abordează problema pătratelor: una se bazează pe infinitezimale și cealaltă pe indivizibile.

Moartea tragică a lui Arhimede de mâna unui soldat roman în timpul asediului din Siracuză (214–212 î.Hr.), în ciuda faptului că